Déterminant circulant et suite de polygones

Geoffrey Deperle

Leçons associées :
— 102 : Groupe des nombres complexes de module 1. Racines de l'unité. Applications.
— 149 : Valeurs propres, vecteurs propres. Calculs exacts ou approchés d'éléments propres. Applications.
— 152 : Déterminant. Exemples et applications.
— 153 : Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.
— 155 : Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.
— 181 : Barycentre dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.

Le but de ce développement est de montrer le théorème suivant :

Théorème. *Soit $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}^n$ et $\omega = e^{i\frac{2i\pi}{n}}$, alors*

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \ddots & a_{n-2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_0 \end{vmatrix} = \prod_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} a_k w^{jk}$$

Preuve : Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$, J la matrice de l'unique endomorphisme qui à e_i associe à e_{i-1} si $i \geq 2$ et qui associe e_1 à e_n. On a

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}, J^k = \begin{pmatrix} 0 & \overbrace{\dots}^{0 \text{ apparait } k \text{ fois}} & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & & & 1 \\ 1 & & & (0) & & & \\ & \ddots & & & & & \\ (0) & & 1 & & & & \end{pmatrix}$$

donc en notant A la matrice dont on cherche le déterminant, on a $A = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k$.

Diagonalisons A en diagonalisant J.

Comme $A = P(J)$ avec $P = \sum_{i=0}^{n-1} a_k X^k$, si $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $Q \neq 0$ et $\deg Q < n$, $Q(J) \neq 0$ (par lecture des coefficients sur la matrice).

Donc le polynôme minimal de J vérifie $\deg \pi_J \geq n$. Or, $J^n - I_n = 0$ donc $\pi_J = X^n - 1$.

Or, π_J divise le polynôme caractéristique χ_J de J donc $\chi_J = X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(X - \omega^k)$.

Donc J est diagonalisable et il existe $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$Q^{-1}JQ = \begin{pmatrix} 1 & & & (0) \\ & \omega & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \omega^{n-1} \end{pmatrix}$$

D'où $Q^{-1}JQ = P(Q^{-1}JQ) = \begin{pmatrix} P(1) & & & (0) \\ & P(\omega) & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & P(\omega^{n-1}) \end{pmatrix}$.

D'où

$$\det(A) = \prod_{i=0}^{n-1} P(\omega^i) = \prod_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega^{jk} \right)$$

□

Application. *Soit P un polygone du plan complexe dont les sommets sont $\{z_1, \dots, z_n\}$. On définit par récurrence la suite de polygone $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ avec $P_0 = P$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, les sommets de P_{k+1} sont les milieux des arêtes de P_k.*
La suite (P_k) converge vers l'isobarycentre de $\{z_1, \dots, z_n\}$.

Preuve :

Étape 1 : Montrons la convergence de la suite (P_k)

On représente le polygone P_k par le vecteur $Z_k = \begin{pmatrix} z_1^k \\ \vdots \\ z_n^k \end{pmatrix}$, la relation de récurrence s'écrit alors

$$Z_{k+1} = \begin{pmatrix} \frac{z_1^k + z_2^k}{2} \\ \vdots \\ \frac{z_n^k + z_1^k}{2} \end{pmatrix} = AZ_n \text{ avec } A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ et } Z_0 = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on a $\forall k \in \mathbb{N}, Z_k = A^k Z_0$. Il suffit de montrer que la suite (A^k) converge pour n'importe quelle norme. On a

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X - \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 & X - \frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

Par calcul du déterminant circulant, on a

$$\chi_A(X) = \prod_{j=0}^{n-1} \left(X - \frac{1 + \omega^j}{2} \right)$$

Puisque les $\frac{1+\omega^j}{2}$ sont distincts deux à deux, χ_A est scindé à racines simples donc A est diagonalisable. Il existe $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $A = QDQ^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1})$ avec pour tout $j \in [\![0, n-1]\!], \lambda_j = \dfrac{1+\omega^j}{2}$.
Or, $\forall j \in [\![1, n-1]\!], \left|\frac{1+\omega^j}{2}\right| = \left|e^{\frac{ij\pi}{2}} \frac{e^{\frac{ij\pi}{2}} + e^{\frac{-ij\pi}{2}}}{2}\right| = |\cos\left(\frac{j\pi}{n}\right) < 1$.
Ainsi, pour tout $j \in [\![0, n-1]\!], \lambda_j^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$.
Par conséquent, la suite (A^k) converge vers $B := Q\mathrm{diag}(1, 0, \ldots, 0)Q^{-1}$.
Posons $Z_\infty = BZ_0$, on a $Z_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} Z_\infty$ (on a $Z_\infty = AZ_\infty$). Or, l'espace propre associé à 1 contient le vecteur $\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$ et est de dimension 1 (car χ_A possède n racines distinctes).

Donc il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que $Z_\infty = a\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$ c'est-à-dire (P_k) converge vers a.

Étape 2 : Montrons que la limite est l'isobarycentre de P

Montrons que les P_k ont même isobarycentre.
Soit g_k l'isobarycentre de P_k, on a pour $k \in \mathbb{N}$,

$$g_{k+1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i^{k+1} = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{z_i^k + z_i^{k+1}}{2} + \frac{z_n^k + z_1^{k+1}}{2}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i^k = g_k$$

Ainsi, par continuité de la fonction qui à n points du plan associe son isobarycentre, (g_k) converge vers l'isobarycentre du polygone $\{a, \ldots, a\}$ qui est a. □

Références

[1] Philippe Caldero et Marie Peronnier. *Carnet de voyage en Algébrie*. Calvage Mounet, 2019.